Ecole Nationale Supérieure des Ingénieurs des Etudes et Techniques d'Armement

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Options M, P et TA

Il est demandé au candidat de laisser à gauche de la page une marge de 4 cm et de repérer clairement sur sa copie les différentes parties du sujet.

La note attribuée tiendra compte de la rédaction et de la présentation de la copie. Il est demandé en particulier au candidat d'encadrer et mettre en évidence les résultats encadrés dans l'énoncé.

Dans tout le problème $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes, $\mathbb{R}$ celui des réels, et pour k et n entiers naturels, $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications définies sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, k fois continûment dérivables.

Les questions des parties I et II sont partiellement indépendantes, la partie III est totalement indépendante des deux précédentes. La partie intitulée *préliminaires* permet de tester les connaissances du candidat sur différentes parties du programme et d'établir des résultats utiles dans le reste du problème.

PRELIMINAIRES

1 - Calculer les primitives $\int \frac{1}{2+\cos\theta}\, d\theta$, pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2 - Soient r un élément de l'intervalle $]0,1[$, L un réel strictement positif, et g la fonction de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = \text{Arctan}\left[\frac{r.\sin(\frac{2\pi x}{2L})}{1 - r.\cos(\frac{2\pi x}{2L})}\right]$$

a - Donner l'ensemble de définition $\boxed{\varepsilon_g}$ de g. Montrer que g est impaire et 2L-périodique.

b - Montrer que g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur ε_g, et étudier ses variations sur [0, L].

c - Montrer qu'il existe une *unique* fraction rationnelle $\boxed{R}$, à déterminer, telle que pour tout x, élément de ε_g, $g'(x) = \tilde{R}\left(\exp\left(\frac{i\,2\pi x}{2L}\right)\right)$, où $\tilde{R}$ désigne la fonction rationnelle associée à R.

d - Soit u un élément de $\mathbb{C}$ de module égal à 1. Montrer qu'il existe un réel $\boxed{A}$ tel que :

$$\tilde{R}(u) = A.\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} r^n . u^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} . \bar{u}^{n+1}\right).$$

3 - Soit f une application 2L-périodique de classe $\mathcal{C}^1$. on note

$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n>0}\left[a_n(f).\cos\left(\frac{n2\pi x}{2L}\right) + b_n(f).\sin\left(\frac{n2\pi x}{2L}\right)\right]$ sa série de Fourier et

$\frac{a_0(f')}{2} + \sum_{n>0}\left[a_n(f').\cos\left(\frac{n2\pi x}{2L}\right) + b_n(f').\sin\left(\frac{n2\pi x}{2L}\right)\right]$ la série de Fourier de sa dérivée

a - Montrer que : $a_n(f') = \left(\frac{n2\pi}{2L}\right).b_n(f)$ et $b_n(f') = -\left(\frac{n2\pi}{2L}\right).a_n(f)$.

b - Déduire du 2- les coefficients de Fourier de g' : $\boxed{a_n(g')}$ et $\boxed{b_n(g')}$

c - Donner les coefficients de Fourier de g : $\boxed{a_n(g)}$ et $\boxed{b_n(g)}$.

4 - h désigne une application indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que h et ses dérivées à tout ordre soient bornées sur $\mathbb{R}$. Soit la série de fonctions

$$\sum_{p\geq 1}\frac{r^p}{p}.h_p \qquad (r \in]0,1[)$$

où la fonction h_p est définie par $h_p(x) = h(px)$.

a - Montrer que la somme s de cette série entière est définie sur tout $\mathbb{R}$.

b - Montrer que s appartient à $\mathcal{C}^k(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour tout entier naturel k.

I - ETUDE DE SYSTEMES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Pour tout système d'équations différentielles linéaires :

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases} \qquad (1)$$

où a, b, c, d, e et f appartiennent à $\mathbb{R}$, on appelle trajectoire du système (1) toute courbe $\begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{cases}$

où $t \longmapsto (X(t), Y(t))$ est une solution réelle du système (1), c'est-à-dire plus précisément le support de l'arc paramétré : $(\mathbb{R} ; t \longmapsto (X(t), Y(t)))$.

Soit $\mathcal{F}$ une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ est appelée intégrale première du système (1) si, et seulement si, elle est constante sur les trajectoires de (1), c'est-à-dire si, et seulement si, pour toute solution (réelle) $t \longmapsto (X(t), Y(t))$ de (1) l'application :

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto \mathcal{F}(X(t), Y(t))$$

est constante.

1 - Soit le système d'équations différentielles linéaires :

$$\begin{cases} x' = e \\ y' = f \end{cases} \quad \text{où e et f désignent des réels.} \qquad (2)$$

a - Montrer que pour tout couple de réels (x_0, y_0), il existe une unique solution (réelle) $(X(t), Y(t))$ du système (2) satisfaisant à la condition initiale $(X(0), Y(0)) = (x_0, y_0)$. Expliciter cette solution.

b - Déterminer la nature géométrique des trajectoires de (2).

c - Montrer que $\mathcal{F}_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto fx - ey$$

est une intégrale première du système (2).

2 - Soit le système d'équations différentielles linéaires :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \qquad (3)$$

a - Montrer que pour tout couple de réels (x_0, y_0), il existe une unique solution (réelle) $(X(t), Y(t))$ du système (3) satisfaisant à la condition initiale $(X(0), Y(0)) = (x_0, y_0)$. Expliciter cette solution.

b - Déterminer la nature géométrique des trajectoires de (3).

c - Montrer que $\mathcal{F}_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto x^2 + y^2$ est une intégrale première du système (3).

3 - Soit le système d'équations différentielles linéaires :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \qquad (4)$$

a - Montrer que pour tout couple de réels (x_0, y_0), il existe une unique solution (réelle) $(X(t), Y(t))$ du système (3) satisfaisant à la condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$.

b - Donner une équation cartésienne de la trajectoire correspondante.

c - Déterminer la nature géométrique des différentes sortes de trajectoires de (4).

d - Donner une intégrale première du système (4). (On pourra s'inspirer du I-3-b-).

II - ETUDE D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

On appelle solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(ax + by + e)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (cx + dy + f)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \qquad (5)$$

où a, b, c, d, e, f appartiennent à $\mathbb{R}$, toute application φ définie sur un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que pour tout couple (x, y) élément de $\mathcal{O}$:

$$(ax + by + e)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) + (cx + dy + f)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) = 0$$

1 - Montrer que toute intégrale première $\mathcal{F}$ de classe C^1 du système (1) est une solution de l'équation aux dérivées partielles (5).

2 - On cherche les applications éléments de $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ solutions de :

$$e.\frac{\partial \varphi}{\partial x} + f.\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{où e, f appartiennent à } \mathbb{R}^*. \qquad (6)$$

a - Montrer que $\mathcal{F}_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto fx - ey$$

est une solution de (6).

b - Soit l'application $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto (fx - ey, ex + fy)$$

Montrer que L est une application linéaire inversible.

c - Soit φ une application élément de $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on définit l'application

$\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(u, v) \longmapsto \psi(u, v)$

par $\psi = \varphi \circ L^{-1}$ c'est-à-dire que $\psi(fx - ey, ex + fy) = \varphi(x, y)$.

Montrer que ψ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. En désignant respectivement par $\frac{\partial \psi}{\partial u}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial v}$ les dérivées partielles de ψ par rapport à la première variable et par rapport à la seconde, calculer :

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial u} \text{ et } \frac{\partial \psi}{\partial v} \text{ au point } (fx - ey, ex + fy)}$$

en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ de φ au point (x, y).

d - Montrer que φ est solution de (6) si, et seulement si, ψ est de la forme :

$\psi(u, v) = \mathcal{K}(u)$ où $\mathcal{K}$ est une fonction quelconque élément de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Donner la forme générale des applications de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ solutions de (6).

3 - On cherche les applications $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 solutions de :

$$y.\frac{\partial \varphi}{\partial x} - x.\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \qquad (7)$$

a - Montrer que $\mathcal{F}_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto x^2 + y^2$$

est une solution de (7).

b - Déterminer un ouvert $\boxed{\Omega}$ de $\mathbb{R}^2$, de la forme I x J où I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ tel que l'application :

$$p : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(r, \theta) \longmapsto (r . \cos\theta , r . \sin\theta)$$

soit une bijection de Ω sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. L'application p est-elle un C^1- difféomorphisme de Ω sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$?

c - Soit φ une application de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1.

On définit l'application :

$$\psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(r, \theta) \longmapsto \psi(r, \theta)$$

par $\psi = \varphi \circ p$ (c'est-à-dire que $\psi(r, \theta) = \varphi(r . \cos\theta , r . \sin\theta)$).

Montrer que ψ est de classe C^1 sur Ω.

En désignant respectivement par $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ les dérivées partielles de ψ par rapport à la première variable et par rapport à la seconde, calculer :

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial r}(r, \theta)} \text{ et } \boxed{\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r, \theta)}$$

en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ de φ au point $(r . \cos\theta, r . \cos\theta)$.

d - Donner la forme générale des solutions de (7).

4 - Ici O désigne l'ensemble $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x > |y| \}$. On cherche les applications de O dans $\mathbb{R}$ de classe C^1, solutions de :

$$y.\frac{\partial \varphi}{\partial x} + x.\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \qquad (8)$$

a - Représenter O.

b - Donner la forme générale des solutions de (8), en utilisant comme dans les questions II- 2- et II- 3- un changement de variables, que pourra inspirer la question I- 3-.

5 - On cherche les applications φ de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 satisfaisant l'équation aux dérivées partielles :

$$y.\frac{\partial \varphi}{\partial x} - x.\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{2.(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} + x} \qquad (9)$$

c'est-à-dire satisfaisant pour tout couple (x, y) d'éléments de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation :

$$y.\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) - x.\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{2.(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} + x}$$

Déterminer les solutions (9) (on pourra effectuer le même changement de variables que dans la question II- 3-).

6 - On cherche les applications φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 satisfaisant l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha^2}.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \qquad (\alpha \text{ appartient à } \mathbb{R}^*) \qquad (10)$$

c'est-à-dire satisfaisant pour tout couple (x,y) d'éléments de $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) - \frac{1}{\alpha^2}.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

(*équation de propagation d'une onde dans la direction des* x *au cours du temps* y)

On définit pour tout couple (e, f) de réels l'application linéaire,

$$L(e,f) : C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$
$$\varphi \longmapsto e.\frac{\partial \varphi}{\partial x} + f.\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

a - Quelle est l'image par L (e, f) de $C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$? Montrer qu'existent des réels $\boxed{e, f, e', f'}$ tels que pour toute application φ élément de $C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

$$L(e,f) \circ L(e',f')(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha^2}.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

b - Déterminer les solutions (10), (on pourra s'inspirer du II- 2-).

III - EQUATION DE LA CORDE VIBRANTE

Soient α un réel non nul et L un réel strictement positif.

On cherche une application $\varphi : [0, L] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,t) \longmapsto \varphi(x,t)$$

admettant des dérivées partielles sur $]0, L[\times \mathbb{R}_+^*$ jusqu'à l'ordre 2 qui satisfait les quatre conditions suivantes :

pour tout $(x,t) \in]0, L[\times \mathbb{R}_+$, $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{1}{\alpha^2}.\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x,t) = 0$ (11)

pour tout $x \in]0, L[$, $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t)$ existe et vaut zéro (12)

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(0,t) = \varphi(L,t) = 0$ (13)

pour tout $x \in [0, L]$, $\varphi(x,0) = g(x)$ (14)

où g est l'application étudiée dans les préliminaires.

(φ *représente le déplacement transverse d'une corde vibrante au point* x , *lâchée sans vitesse initiale* (12), *les extrémités* x = 0 , x = L *de la corde étant fixes* (13), *sa forme à l'instant* t = 0 *étant donnée par* g (14)).

1 - Soit φ une application non nulle, définie sur $[0, L] \times \mathbb{R}_+$ à valeurs réelles qui satisfait les conditions (11), (12), (13) et qui est de la forme $\varphi(x,t) = \Phi(x) \times T(t)$, où Φ est une application de $[0, L]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 et T une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2.

a - Montrer qu'il existe un réel k tel que :

$$\Phi'' = -k.\Phi \text{ sur }]0, L[\text{ et } T'' = -k\alpha^2.T \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

b - Montrer que k est un réel positif et préciser alors la forme de

$$\boxed{\omega = \sqrt{k}}.$$

c - Montrer qu'une application non nulle, définie sur $[0, L] \times \mathbb{R}_+$ de la forme $\Phi \times T$, où Φ est une application de classe C^2 de $[0, L]$ dans $\mathbb{R}$ et T une application de classe C^2 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, satisfait (11), (12) et (13) si, et seulement si, existent B, réel non nul, et m, entier naturel non nul, tels que :

$$\Phi(x) \times T(t) = B.\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right).\cos\left(\frac{m\pi\alpha t}{L}\right)$$

d - Représenter sur un même graphique pour $\alpha = 1$.

$$[0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right).\cos\left(\frac{3\pi\alpha t}{L}\right) \text{ pour } t = 0, \frac{L}{9}, \frac{L}{6}, \frac{2L}{9}, \frac{L}{3}.$$

2 - A tout élément x de $[0, L]$ et tout élément t de $\mathbb{R}_+$ est associée la série

$$\sum_{p \geq 1} \frac{r^p}{p}.\sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right).\cos\left(\frac{p\pi\alpha t}{L}\right), \text{ où } r \text{ est l'élément de }]0, 1[\text{ qui intervient}$$

dans la définition de g.

a - Montrer que cette série converge, pour tout élément x de $[0, L]$ et tout élément t de $[0, L] \times \mathbb{R}_+$; sa somme sera notée $S(x, t)$.

b - Montrer que $S(x, 0) = g(x)$ pour tout x élément de $[0, L]$; on justifiera rigoureusement ce résultat en citant le théorème du cours utilisé.

c - Montrer que l'application $(x, t) \longrightarrow S(x, t)$ admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 sur $]0, L[\times \mathbb{R}_+^*$. Donner l'expression sous forme de séries de :

$$\boxed{\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x,t), \frac{\partial S}{\partial t}(x,t) \text{ et } \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}(x,t)}$$

d - Montrer que S satisfait (11), (12), (13) et (14) et répond ainsi au problème.